ZÁKLADY DEMPSTER-SHAFEROVY TEORIE A JEJÍ APLIKACE PRO MODELOVÁNÍ BEZPEČNOSTI A SPOLEHLIVOSTI (II.)

BERÁNEK L.
Jihočeská univerzita, Katedra aplikované matematiky a informatiky, České Budějovice, beranek@ef.jcu.cz

V tomto druhém díle budeme prezentovat základy Dempster-Shaferovy teorie [1] na příkladech. Nejprve na jednodušších příkladech budeme demonstrovat použití kombinačního pravidla uvedeného v první části příspěvku a poté si ukážeme složitější aplikaci.

1. Příklady na ilustraci kombinace domněnkových funkcí

Příklad 1

Nechť systém vzájemně disjunktních základních hypotéz je tvořen dvěma atomickými hypotézami h_1 a h_2 (které jsou např. výsledkem vyjádření třech nezávislých specialistů, hypotézy se mohou týkat příčiny havárie). Máme tedy tři základní přiřazení m_1, m_2 a m_3, která byla přiřazena specialisty 1, 2 a 3. Hodnoty jsou uvedeny v tab. 1.

Tab. 1 – Příklad kombinace domnění

	1	2	3	Výsledek
$m_i(h_1)$	0,8	0,6	0,25	0,6667
$m_i(h_2)$	0,2	0,4	0,75	0,3333

Výpočet ortogonálního součtu $m_{12} = m_1 \oplus m_2$ je:

$m_{12}(h_1) = K^{-1} \,.\, m_1(h_1) \,.\, m_2(h_1) = K^{-1} \,.\, 0{,}8 \,.\, 0{,}6 = K^{-1} \,.\, 0{,}48$

$m_{12}(h_2) = K^{-1} \,.\, m_1(h_2) \,.\, m_2(h_2) = K^{-1} \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}4 = K^{-1} \,.\, 0{,}08$

Faktor K se vypočítá jako:

$K = m_1(h_1) \,.\, m_2(h_1) + m_1(h_2) \,.\, m_2(h_2) = 0{,}48 + 0{,}08 = 0{,}56.$

Výsledek:

$m_{12}(h_1) = 0{,}8571,\ m_{12}(h_2) = 0{,}1429$

Sloučení m_{12} a m_3 má za výsledek:

$m_{123}(h_1) = 0{,}6667,\ m_{123}(h_2) = 0{,}3333$

Takže po procesu kombinace je nepravděpodobnější hypotéza h_1. Ale ani hypotézu h_2 nemůžeme úplně vyloučit, protože h_2 měla také určitou podporu, zvláště m_3 (od specialisty č. 3).

Příklad 2

Počítač nepracuje správně. Možné příčiny jsou závada napájení (*zn*), závada na hlavní desce (*zd*), závada operační paměti (*zp*) nebo závada grafické karty (*zg*). Tyto příčiny tvoří množinu vzájemně disjunktních základních hypotéz – rámec domnění Θ. Technik provede dva testy počítače. První test „podporuje“ domnění o závadě na napájení nebo na hlavní desce ($\{zn, zd\}$) se stupněm 0,6. Druhý test ale pouze vyvrací závadu napájení $\{zn\}$ (je tedy možné, že příčinou nefungování počítače jsou ostatní tři závady), a to se stupněm 0,7. Jaké jsou kombinované domněnkové funkce?

Tab. 2 – Příklad kombinace domnění

		m_2	
		{zd, zp, zg} (0,7)	Θ (0,3)
m_1	{zn, zd} (0,6)	{zd} (0,6 x 0,7) = (0,42)	{zn, zd} (0,6 x 0,3) = (0,18)
	Θ (0,4)	{zd, zp, zg} (0,4 x 0,7) = (0,28)	Θ (0,4 x 0,3) = (0,12)

Nyní můžeme spočítat kombinaci domněnkových funkcí $(Bel_1 \oplus Bel_2)(\{zn, zd\})$ z obou testů: $(Bel_1 \oplus Bel_2)(\{zn, zd\}) = (m_1 \oplus m_2)(\{zn, zd\}) + (m_1 \oplus m_2)(\{zn\}) + +(m_1 \oplus m_2)(\{zd\}) = 0{,}18 + 0 + 0{,}42 = 0{,}60$ …a tak dále

Pokud bude proveden i třetí test, může být zkombinován s předcházejícími dvěma testy stejným způsobem. Takto můžeme zkombinovat libovolný počet funkcí domnění.

2. Ilustrace principů na příkladu z oblasti bezpečnostního a spolehlivostního inženýrství

Použití Dempster-Shaferovy teorie si ukážeme na typické situaci, např. v chemickém provozu. Operátoři zjistí na ovládacím panelu nestandardní stav určitého zařízení. Příčiny tohoto stavu nejsou zřejmé. Operátoři se proto snaží získat důkazy pro posouzení příčin tohoto stavu a na základě posouzení např. údajů z kontrolních přístrojů (ty nazveme evidence a označíme je ω_i, množinu evidencí označíme jako $\Omega = \{d_1, \ldots d_m\}$) apod. formulují hypotézy h_i, týkající se příčin nestandardního stavu a kvantifikují je.

Pro zjednodušení předpokládejme, že příčiny nestandardního stavu zařízení mohou být nejvýše tři. Popíšeme je třemi přesně definovanými hypotézami h_1, h_2 a h_3. Tyto hypotézy tvoří celkovou oblast úvah (rámec domnění) Θ, kde $\Theta = \{h_1, h_2, h_3\}$. Poznamenejme, že hypotézy h_1, h_2 a h_3 jsou definovány na základě subjektivních hledisek operátorů. Odpovídající potenční množina 2^Θ je $2^\Theta = \{\emptyset, \{h_1\}, \{h_2\}, \{h_3\}, \{h_1, h_2\}, \{h_1, h_3\}, \{h_2, h_3\}, \Theta\}$.

První operátor (označíme ho jako *A*) uvádí jako příčinu nestandardního stavu h_1 nebo h_2 (hypotézy h_1 a h_2). Jeho posouzení může vycházet např. z údajů kontrolních přístrojů, jejichž hodnoty podle něho (evidence) ukazují na h_1 nebo h_2. Druhý operátor (označíme ho jako *B*) posuzuje příčiny nestandardního stavu mírně rozdílně. Tvrdí, že příčinou nestandardního stavu je h_1 nebo h_3. Oba operátoři dokládají svá stanoviska údaji ze čtyř kontrolních přístrojů (v našem smyslu se jedná o důkazy, které podle jednotlivých operátorů podporují určitou hypotézu). Přehled hodnocení údajů kontrolních přístrojů (důkazů) operátory je uveden v tabulce 3.

Tab. 3 – Přehled hypotéz o příčině nestandardního stavu, které operátoři definovali na základě údajů 4 kontrolních přístrojů (důkazů)

Údaj kontrolního přístroje P(Ω)	Hypotéza operátora A o příčině P(Θ)	Hypotéza operátora B o příčině P(Θ)
d_1	h_1	h_1
d_2	h_2	h_3
d_3	h_1 nebo h_2	h_1 nebo h_3
d_4	h_1 nebo h_2 nebo h_3	h_1 nebo h_2 nebo h_3

Poznamenejme, že zde určitý důkaz (zde údaj kontrolního přístroje) nemusí vést ke stejné hypotéze. Různé důkazy vedou k různým množinám hypotéz, které ale mohou obsahovat stejné hypotézy. Například d_1, d_3 a d_4 vedou v této tabulce k množinám hypotéz, které všechny obsahují h_1 (v prvním řádku je jednoprvková množina hypotéz $\{h_1\}$). Jak jsme již uvedli, DS teorie umožňuje uvažovat modelovat příčinné vztahy důkaz-hypotéza nebo důkaz-více hypotéz při odhadu příčiny nestandardního stavu zařízení.

Dokončení na další straně

Příčina nestandardního stavu je právě jedna hypotéza patřící do Θ. Jinými slovy právě jedna hypotéza z $\Theta = \{h_1, h_2, h_3\}$ vystihuje danou situaci. Operátoři si však nejsou jisti, která příčina způsobuje ve skutečnosti nestandardní stav zařízení.

2.1 Kvantifikace hypotéz (závěrů operátorů o nestandardním stavu)

V tomto kroku oba operátoři kvantifikují své hypotézy týkající se nestandardního stavu zařízení (tab. 4). Například druhý operátor vyjadřuje své přesvědčení o tom, že nestandardní stav je zapříčiněn h_1 nebo h_3 se stupněm (základním přiřazením) 0,4 (je třeba poznamenat, že při slovní formulaci je obtížné vyhnout se výrazu „pravděpodobnost". Základní přiřazení ale nejsou pravděpodobnosti, jak bylo uvedeno v úvodu této kapitoly). Jedná se o subjektivní odhad založený na zkušenostech operátorů apod.

Tab. 4 – Kvantifikace příčin nestandardního stavu operátory (vnější sloupce). Levý sloupec obsahuje všechny podmnožiny z 2^Θ (všechny atomické hypotézy a jejich kombinace)

Hypotézy z 2^Θ	Základní přiřazení týkající se dané hypotézy	
	Operátor A	Operátor B
$\{h_1\}$	$m_A(h_1) = 0$	$m_B(h_1) = 0{,}1$
$\{h_2\}$	$m_A(h_2) = 0{,}1$	$m_B(h_2) = 0$
$\{h_3\}$	$m_A(h_3) = 0{,}2$	$m_B(h_3) = 0{,}2$
$\{h_1 \cup h_2\}$	$m_A\{h_1 \cup h_2\} = 0$	$m_B\{h_1 \cup h_2\} = 0$
$\{h_1 \cup h_3\}$	$m_A\{h_1 \cup h_3\} = 0$	$m_B\{h_1 \cup h_3\} = 0{,}6$
$\{h_2 \cup h_3\}$	$m_A\{h_2 \cup h_3\} = 0{,}5$	$m_B\{h_2 \cup h_3\} = 0$
$\{h_1 \cup h_2 \cup h_3\}$	$m_A\{h_1 \cup h_2 \cup h_3\} = 0{,}2$	$m_B\{h_1 \cup h_2 \cup h_3\} = 0{,}1$

Použitím základních přiřazení provedených oběma operátory můžeme vypočítat míru domnění a pochyb a plauzibilitu a nedůvěru (nevíru). Například míra domnění k množině hypotéz $\{h_1 \cup h_3\}$ je součet základního přiřazení této množiny se základními přiřazeními všech jejich podmnožin $\{h_1\}$, $\{h_3\}$, $\{h_1 \cup h_3\}$. Takže pro míru domnění pro $h_1 \cup h_3$ u druhého operátora platí $Bel_B(h_1 \cup h_3) = m_B(h_1) + m_B(h_3) + m_B(h_1 \cup h_3) = 0{,}9$ s odpovídající mírou pochyb $1 - Bel_B(h_1 \cup h_3) = 0{,}1$.

Míra věrohodnosti zahrnuje základní přiřazení všech množin hypotéz o příčinách tvrzení, která mají aspoň jednu hypotézu společnou s množinou hypotéz, u které počítáme míru věrohodnosti. Pokud vybereme množinu hypotéz o příčinách $\{h_1 \cup h_3\}$, pak je to součet základních přiřazení, kde průnik množiny $\{h_1 \cup h_3\}$ s množinami $\{h_1\}$, $\{h_3\}$, $\{h_1 \cup h_2\}$, $\{h_1 \cup h_3\}$, $\{h_2 \cup h_3\}$, $\{h_1 \cup h_2 \cup h_3\}$ je nenulový.

Velikost plauzibility pro $\{h_1 \cup h_3\}$ u druhého operátora pak je:

$$pl_B(h_1 \cup h_3) = m_B(h_1) + m_B(h_3) + m_B(h_1 \cup h_2) + m_B(h_1 \cup h_3) + m_B(h_2 \cup h_3) + m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) = 1$$

Velikosti míry domnění a míry věrohodnosti jsou uvedeny v tab. 5.

Tab. 5 – Tato tabulka odpovídá tab. 4 a ukazuje hodnoty základních přiřazení, míry domnění a míry věrohodnosti pro každou množinu hypotéz (levý sloupec) a operátora

	Operátor 1			Operátor 2		
2^Θ	m_A	Bel_A	pl_A	m_B	Bel_B	pl_B
$\{h_1\}$	0	0	0,2	0,1	0,2	0,8
$\{h_1\}$	0,1	0,1	0,8	0	0	0,1
$\{h_1\}$	0,2	0,2	0,9	0,2	0,2	0,9
$\{h_1 \cup h_2\}$	0	0,1	0,8	0	0,2	0,8
$\{h_1 \cup h_2\}$	0	0,2	0,9	0,6	0,9	1
$\{h_1 \cup h_2\}$	0,5	0,3	1	0	0,2	0,9
$\{h_1 \cup h_2 \cup h_3\}$	0,2	1	1	0,1	1	1

2.2 Kombinování hypotéz jednotlivých operátorů o příčině nestandardního stavu

Ve třetím kroku jsou kombinovány hypotézy nebo množiny hypotéz z jednoho datového zdroje (operátor A) s hypotézami nebo množinami hypotéz z druhého datového zdroje (operátor B). Výslednou velikost základního přiřazení označíme m.

$K = \sum_{h_i, h_j : h_i \cap h_j \neq \phi} m_A(h_i) \cdot m_B(h_j)$ikost faktoru K. Pro K platí:

h_i a h_j zde označuje podmnožiny z 2^Θ.

Tedy:

$$K = m_A(h_1 \cup h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1) + m_A(h_2) \,.\, m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) + m_A(h_3) \,.\, m_B(h_3) + m_A(h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_3) + m_A(h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) + m_A(h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_3) + m_A(h_1 \cup h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_3) + m_A(h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_3) + m_A(h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) + m_A(h_1 \cup h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_3) + m_A(h_1 \cup h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) = 0{,}1 \,.\, 0{,}1 + 0{,}2 \,.\, 0{,}1 + 0{,}2 \,.\, 0{,}2 + 0{,}2 \,.\, 0{,}6 + 0{,}2 \,.\, 0{,}1 + 0{,}5 \,.\, 0{,}2 + 0{,}2 \,.\, 0{,}2 + 0{,}5 \,.\, 0{,}6 + 0{,}5 \,.\, 0{,}1 + 0{,}2 \,.\, 0{,}6 + 0{,}2 \,.\, 0{,}1 = 0{,}84$$

Nyní použijeme rovnici 4 z prvního dílu k výpočtu kombinace základních přiřazení hypotéz a jejich množin hypotéz, provedených jednotlivými operátory.

$$m(h_1) = K^{-1} \,.\, m_A(h_1 \cup h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1) = 0{,}84^{-1} \cup 0{,}1 \cup 0{,}1 = 0{,}01191$$

$$m(h_2) = K^{-1} \,.\, m_A(h_2) \,.\, m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) = 0{,}84^{-1} \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}1 = 0{,}02381$$

$$m(h_3) = K^{-1} \,.\, m_A(h_3) \,.\, m_B(h_3) + m_A(h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_3) + m_A(h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) + m_A(h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_3) + + m_A(h_1 \cup h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_3) + + m_A(h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_3) = 0{,}84^{-1} \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}2 + 0{,}2 \,.\, 0{,}6 + 0{,}2 \,.\, 0{,}1 + + 0{,}5 \,.\, 0{,}2 + + 0{,}2 \,.\, 0{,}2 + 0{,}5 \,.\, 0{,}6 = 0{,}73809$$

$$m(h_2 \cup h_3) = K^{-1} \,.\, m_A(h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) = 0{,}84^{-1} \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}1 = = 0{,}05952$$

$$m(h_1 \cup h_3) = K^{-1} \,.\, m_A(h_1 \cup h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_3) = 0{,}84^{-1} \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}6 = = 0{,}14285$$

$$m(h_1 \cup h_2 \cup h_3) = K^{-1} \,.\, m_A(h_1 \cup h_2 \cup h_3) \,.\, m_B(h_1 \cup h_2 \cup h_3) = 0{,}84^{-1} \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}1 = 0{,}02381$$

Další domněnkové funkce pro kombinované hypotézy jsou vypočítané podle postupu popsaného v tabulce 5 a jsou uvedeny v tabulce 6.

Tab. 6 – Výsledné hodnoty základního přiřazení, míry domnění a plauzibility (všechny hodnoty jsou zaokrouhleny) srovnané podle velikosti

Hypotézy	*m*	*Bel*	*pl*
$\{h_1\}$	0,01191	0,01191	0,09524
$\{h_2\}$	0,02381	0,02381	0,19047
$\{h_3\}$	0,73809	0,73809	0,96427
$\{h_1 \cup h_3\}$	0,05952	0,80952	0,97618
$\{h_2 \cup h_3\}$	0,14285	0,90475	0,98808
$\{h_1 \cup h_2 \cup h_3\}$	0,02381	1	1

2.3 Interpretace

Z tabulky je vidět, že h_1 a h_2 mají nejnižší hodnoty domněnkových funkcí. Avšak h_1 se vyznačuje poloviční nejistotou ve srovnání s nejistotou u h_2. Nicméně obě hypotézy nebudeme dále uvažovat s ohledem na nízké míry domnění a plauzibility. Nejistota vztahující se k hypotéze h_3 má poměrně vysokou hodnotu nejistoty (~0,23). Kombinace h_1 a h_3 vykazuje nižší nejistotu (~0,17) s o něco vyšší plauzibilitou než h_3. Kombinace h_2 a h_3 má pak nižší hodnotu nejistoty (~0,08) (viz obr. 2 v první části miniseriálu) než h_3. Kombinace h_1 a h_3 má vyšší plauzibilitou než mají h_3 nebo kombinace h_2 a h_3.

Závěrem je možné konstatovat, že příčinou nestandardního stavu zařízení je kombinace příčin h_2 a h_3. Poznamenejme, že použitím pravděpodobnostního přístupu bychom dostali h_3 jako příčinu nestandardního stavu.

Další příklady ilustrace použití Dempster-Shaferovy teorie bychom našli v literatuře například v [2–5].

3. Literatura

[1] SHAFER, G. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton: Princeton University Press, 1976, 292 s.

[2] BAE, H., GRANDHI, V.R., CANFIELD, A.R. An approximation approach for uncertainty quantification using evidence theory. *Reliability Engineering and System Safety.* 2004, 86, 3, s. 215–225.

[3] LEFEVRE, E., COLOT, O., VANNOORENBERGHE, P. Belief function combination and conflict management. *Information Fusion.* 2002, 3, 2, s. 149–162.

[4] PARSONS, S. Some Qualitative Approaches to Applying the Dempster-Shafer Theory. *Information and Decision Technologies.* 1994, 19, 4, s. 321–337.

[5] RAKOWSKY, U. K. Fundamentals of the Dempster-Shafer Theory and its Applications to Reliability Modeling. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering.* 2007, 14, 6, s. 579–601.

Abstract

Summary: *We will demonstrate in this three-part series the application of Dempster-Shafer theory to problems from the field of safety and reliability engineering. This theory is mainly used in expert systems, but it has application also in other areas, especially for methods involving expert estimation. In the first part, we describe the basics of the Dempster-Shafer theory and present some simple illustrative examples. In the second part, we present examples in which we use combination of information from various resources. It is the simple example from safety and reliability engineering. In the third part, we show an application of the Dempster-Shafer theory to the event tree analysis. The aim of the mini-series is to show that Dempster-Shafer theory copes with uncertainty arising from such lack of available information or ignorance compared to the probability theory and that it can be used with advantage for modeling in safety and reliability engineering.*

Keywords: safety and reliability engineering, belief function, Event Tress Analysis, uncertainty modeling